An example of a non adequate numeral system

Karim Nour

An example of a non adequate numeral system

Karim NOUR

Abstract *A numeral system is defined by three closed λ-terms : a normal λ-term d_0 for Zero, a λ-term S_d for Successor, and a λ-term for Zero Test, such that the λ-terms $(S_d{}^i\ d_0)$ are normalizable and have different normal forms. A numeral system is said adequate iff it has a closed λ-term for Predecessor. This Note gives a simple example of a non adequate numeral system.*

Un exemple d'un système numérique non adéquat

Résumé *Un système numérique est défini par la donnée de trois λ-termes clos: un λ-terme normal d_0 pour Zéro, un λ-terme S_d pour le Successeur, et un λ-terme pour le Test à Zéro, tels que les λ-termes $(S_d{}^i\ d_0)$ sont normalisables et possèdent des formes normales differentes. Un système numérique est dit adéquat ssi il possède un λ-terme clos pour le Prédécesseur. Dans cette Note nous présentons un exemple simple d'un système numérique non adéquat.*

Version Française Abrégée

Un *système numérique* est une suite $\mathbf{d} = d_0, d_1, ..., d_n, ...$ de λ-termes normaux clos différents pour laquelle il existe des λ-termes clos S_d et Z_d tels que :

$$(S_d\ d_n) \simeq_\beta d_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$\text{et}$$
$$(Z_d\ d_0) \simeq_\beta \lambda x \lambda y x$$
$$(Z_d\ d_{n+1}) \simeq_\beta \lambda x \lambda y y \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Les λ-termes S_d et Z_d sont appelés *Successeur* et *Test à Zéro* pour $\mathbf{d}$.

Chaque système numérique peut être naturellement considérer comme un codage des entiers en λ-calcul et donc nous pouvons représenter les fonctions numériques totales de la manière suivante:

Une fonction numérique totale $\phi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ est dite λ-*définissable* dans un système numérique $\mathbf{d}$ si et seulement si :

$$\exists\ F_\phi\ \forall\ n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}\ (F_\phi\ d_{n_1}...d_{n_p}) \simeq_\beta d_{\phi(n_1,...,n_p)}$$

La différence entre la définition d'un système numérique que nous proposons ici et celle donnée par H. Barendregt dans [1] est le fait que nous exigons que les d_i soient normaux et différents. En effet ces dernières conditions permettent avec des stratégies de réduction fixées une fois pour toute (par exemple la stratégie de la réduction gauche qui consiste à réduire toujours dans un λ-terme le redex le plus à gauche) la valeur exacte d'une fonction calculée sur des arguments.

Un système numérique **d** est dit *adéquat* si et seulement s'il existe un λ-terme clos P_d tel que :

$$(P_d\ d_{n+1}) \simeq_\beta d_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le λ-terme P_d est appelé *Prédécesseur* pour **d**.

H. Barendregt a démontré dans [1] que :

Un système numérique **d** *est adéquat si et seulement si toutes les fonctions récursives totales sont λ-définissables dans* **d**.

Une question se pose : **Peut on trouver un système numérique non adéquat ?**

Nous présentons dans cette Note un exemple d'un système numérique non adéquat.

Le système numérique non adéquat que nous proposons est le suivant :

$$d_0 = \lambda x(x\quad \lambda x\lambda yx\quad \lambda xx)$$

et

$$d_{n+1} = \lambda x(x\quad \lambda x\lambda yy\quad \lambda x_1...\lambda x_n\lambda xx) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La démonstration de non adéquation s'inspire des techniques développées par J-L Krivine dans [3] pour démontrer son théorème de mise en mémoire.

---

1 Notations and definitions

The notations are standard (see [1] and [2]).

- The β-equivalence relation is denoted by $M \simeq_\beta N$.
- We denote by T (for True) the λ-term $\lambda x \lambda y x$ and by F (for False) the λ-term $\lambda x \lambda y y$.
- The notation $\sigma(M)$ represents the result of the simultaneous substitution σ to the free variables of M after a suitable renaming of the bounded variables of M.
- The pair $< M, N >$ denotes the λ-term $\lambda x(x\ M\ N)$.
- Let us recall that a λ-term M either has a *head redex* [i.e. $M = \lambda x_1 ... \lambda x_n (\lambda x U\ V\ V_1 ... V_m)$, the head redex being $(\lambda x U\ V)$], or is in *head normal form* [i.e. $M = \lambda x_1 ... \lambda x_n (x\ V_1 ... V_m)$].
- The notation $M \succ N$ means that N is obtained from M by some head reductions and we denote by $h(M, N)$ the length of the head reduction between M and N.
- A λ-term is said *solvable* iff its head reduction terminates.

The following results are well known :

- If M is β-equivalent to a head normal form then M is solvable.

- If $M \succ N$, then, for any substitution σ, $\sigma(M) \succ \sigma(N)$, and $h(\sigma(M), \sigma(N))$=h(M,N). In particular, if for some substitution σ, $\sigma(M)$ is solvable, then M is solvable.

2 Numeral systems

- A *numeral system* is a sequence $\mathbf{d} = d_0, d_1, ..., d_n, ...$ consisting of different closed normal λ-terms such that for some closed λ-terms S_d and Z_d :

$$(S_d\ d_n) \simeq_\beta d_{n+1} \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$
$$\text{and}$$
$$(Z_d\ d_0) \simeq_\beta T$$
$$(Z_d\ d_{n+1}) \simeq_\beta F \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$

The λ-terms S_d and Z_d are called *Successor* and *Zero Test* for $\mathbf{d}$.

Each numeral system can be naturally considered as a coding of integers in λ-calculus and then we can represent total numeric functions as follows:

- A total numeric function $\phi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ is λ-*definable* with respect to a numeral system $\mathbf{d}$ iff

$$\exists\ F_\phi\ \forall\ n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}\ (F_\phi\ d_{n_1}...d_{n_p}) \simeq_\beta d_{\phi(n_1,...,n_p)}$$

- A numeral system **d** is called *adequate* iff there is a closed λ-term P_d such that

$$(P_d\ d_{n+1}) \simeq_\beta d_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

  The λ-term P_d is called *Predecessor* for **d**.

H. Barendregt has shown in [1] that :

> *A numeral system* **d** *is adequate iff all total recursive functions are λ-definable with respect to* **d**.

A question arises : **Can we find a non adequate numeral system ?**

3 An example of a non adequate numeral systems

Theorem *There is a non adequate numeral system.*

Proof For every $n \in \mathbb{N}$, let $p_n = \lambda x_1...\lambda x_n \lambda x x$.
Let $d_0 =< T, p_0 >$ and for every $n \geq 1$, $d_n =< F, p_n >$.
It is easy to check that the λ-terms $S_d = \lambda n < F, \lambda x n >$ and $Z_d = \lambda n(n\ T)$ are λ-terms for Successor and Zero Test for **d**.
Let ν, x, y be different variables.
If **d** possesses a closed λ-term P_d for Predecessor, then the λ-term
$Q_d = \lambda n((P_d\ < F, n >)\ T)$ satisfies the following :

$$(Q_d\ p_{n+1}\ x\ y) \simeq_\beta \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ y & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

then

$$(Q_d\ p_{n+1}\ x\ y) \succ \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ y & \text{if } n \geq 1 \end{cases}.$$

Therefore $(Q_d\ \nu\ x\ y)$ is solvable and its head normal form does not begin by λ.
We have three cases to see :

- $(Q_d\ \nu\ x\ y) \succ (x\ u_1...u_k)$, then $(Q_d\ p_2\ x\ y) \not\succ y$.
- $(Q_d\ \nu\ x\ y) \succ (y\ u_1...u_k)$, then $(Q_d\ p_1\ x\ y) \not\succ x$.

- $(Q_d\ \nu\ x\ y) \succ (\nu\ u_1 ... u_k)$, then $(Q_d\ p_{k+2}\ x\ y) \not\succ y$.

Each case is impossible. Therefore **d** is a non adequate numeral system. □

Acknowledgement. We wish to thank Mariangiola Dezani for helpful discussions.

References

[1] H. Barendregt *The lambda calculus, its syntax and semantics.* **North Holland, 1984**

[2] J-L. Krivine *Lambda calcul, types et modèles.* **Masson, 1990**

[3] J-L. Krivine *Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gődel.* **Archive. Math. Logic 30. (241-267), 1990**

[4] K. Nour *A conjecture on numeral systems.* **Submited to Studia Logica**

LAMA - ÉQUIPE DE LOGIQUE
UNIVERSITÉ DE CHAMBÉRY
73376 LE BOURGET DU LAC

E-mail: nour@univ-savoie.fr